Astuces pour résoudre des équations du second degré dont tous les trois coefficients *a*, *b* et *c* sont tous entiers avec très peu de calculs.

On s'intéresse à l'équation $ax^2+bx+c=0$, *a*, *b* et *c* étant trois réels, $a \neq 0$

Rappel : Si cette équation a des racines x_1 et x_2 , alors $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

Par prudence, on peut d'abord calculer (ou évaluer grossièrement) le discriminant Δ afin d'éviter une recherche inutile de racines évidentes.

Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions que l'on peut trouver en appliquant tout bêtement les formules. On ne rate pas l'occasion, lorsque c'est le cas, de trouver des racines évidentes (ce sont en général des nombres entiers, positifs ou négatifs)

Si $\frac{c}{a}$ est un entier (c'est-à-dire si *c* est un multiple de *a*) , alors il est possible que cette équation admette deux racines entières.
Sinon, l'équation peut avoir une racine entière, mais elle ne peut en avoir deux (sinon, le produit serait alors un entier)

Si α est une racine du polynôme ax^2+bx+c, alors α est un diviseur de la constante c. En effet, l'égalité $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ permet d'en déduire que $\alpha(a\alpha+b) = -c$. Cette dernière égalité est un produit de deux entiers qui permet de prouver que *c* est un multiple de α.

Il suffit donc d'écrire tous les diviseurs de *c* (en pensant aux entiers négatifs) pour les tester. Avec un peu de chance, on en trouve et l'égalité $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ permet de trouver la deuxième racine.

Exemples :

♫ $5x^2+7x+3=0$ On peut tester -1,1,3 et -3 comme racines mais si l'on calcule sommairement Δ, on s'aperçoit que $\Delta<0$
L'équation est résolue (on donnera la valeur exacte de Δ pour ne pas donner l'impression que l'on a fait un pari)

☼ $5x^2+20x-105=0$ On a intérêt à factoriser par 5 (à condition d'avoir repéré que les trois coefficients sont des multiples de 5)

$5x^2+20x-105=0 \Leftrightarrow 5(x^2+4x-21)=0 \Leftrightarrow x^2+4x-21=0$ On voit sans calcul complet que Δ est positif et l'on va d'abord chercher s'il n'existe pas une racine entière du polynôme $x^2+4x-21$.
Les diviseurs de 21 sont $1, -1$, 3, -3, 7, -7, 21, -21.
Pour le calcul mental, il vaut mieux calculer x^2-21 (deux nombres opposés ont le même carré)
On trouve très rapidement que 3 est une racine de ce polynôme.
L'autre racine est donc -7 (on l'obtient par la formule $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ou bien par la formule $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$)

♣ $3x^2-11x+6=0$
On ne peut pas factoriser le polynôme par une constante, on voit sans calcul que Δ est un nombre positif, on cherche d'abord si un diviseur de 6 ne serait pas une racine évidente du polynôme $3x^2-11x+6$.
3 est une racine évidente. $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ L'autre racine est donc égale à $\frac{2}{3}$.

♥ $6x^2-7x+2=0$

Si l'on cherche une racine entière du polynôme $6x^2-7x+2$, on teste alors avec -1, 1, -2 et 2 qui sont les diviseurs de 2.
Aucun de ces nombres n'est une racine du polynôme.
On se résigne à calculer le discriminant Δ afin d'appliquer scrupuleusement les formules habituelles. On trouve $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.
(On constate ici qu'aucune de ces deux racines n'était évidente a priori).

Dernière remarque :
Les équations particulières du type $ax^2+bx=0$ ou $ax^2+c=0$ se traitent de façon encore plus rapide.
Exemple : $5x^2-7x=0$ (on factorise par x)
$3x^2+1=0$ (équation sans solution puisque $3x^2+1>0$ pour tout réel x)
$3x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$