Evaluation   Groupe 9

Exercice 1 :

Soit $P(X) = 2X^4 - 2X^3 - 14X^2 + 26X - 12$.

1. Montrer que 1 est racine de P puis déterminer son ordre de multiplicité.

   On calcule $P(1)$ et l'on trouve bien 0.   1 est donc une racine de P.
   On calcule $P'(x)$ en fonction de x pour constater que $P'(1) = 0$. On calcule $P''(x)$ pour constater que $P''(1) \neq 0$
   1 est donc une racine double du polynôme *P*.
   Remarque : Ce résultat permet de conclure que $P(X) = (X-1)^2 Q(X)$ où Q est un polynôme tel que 1 n'est pas une racine de Q.

2. Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 - 2X + 1$

   Remarque : En fait, on demande de diviser par $(X-1)^2$, ce qui va permettre de trouver le polynôme Q évoqué à la question 1.
   En posant la division, on trouve pour quotient $Q(X) = 2X^2 + 2X - 12$ et bien sûr pour reste $R(X) = 0$.
   On conclut en écrivant l'égalité $\boldsymbol{P(X) = (X^2 - 2X + 1)(2X^2 + 2X - 12)}$

3. Factoriser maintenant P comme produit de facteurs du premier degré.

   $2X^2 + 2X - 12$ est un polynôme du second degré. S'il a des racines X_1 et X_2, il se factorise par la formule $a(X - X_1)(X - X_2)$
   On trouve très rapidement $X_1 = 2$ et $X_2 = -3$. Evidemment, $X^2 - 2X + 1$ s'écrit aussi $(X-1)^2$.
   $\boldsymbol{P(X) = 2(X-1)^2(X-2)(X+3)}$

Exercice 2 : On considère le polynôme P de l'exercice précédent
Calculer $P(-3)$ en utilisant le schéma de Hörner. En déduire une forme factorisée du polynôme P.

C'est du cours.
On trouve comme coefficients 2, −8, 10, −4. Le dernier nombre est $P(-3)$.
Conclusion : −3 est une racine de P et $\boldsymbol{P(X) = (X+3)(2X^3 - 8X^2 + 10X - 4)}$
Remarque : Cette forme factorisée peut se retrouvée en comparant avec l'exercice 1.

Exercice 3 : Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+x-2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g (le donner sous la forme de la réunion de 3 intervalles)
2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Etudier le signe de $x^2 + x - 2$
4. En déduire la limite à droite et la limite à gauche de la fonction g en -2.

Vu et revu. L'essentiel est de bien préciser l'étude du signe du dénominateur lorsque celui a pour limite 0. Sinon, on ne peut pas conclure.