TD 4 : Corrigé rapide

Exercice 1

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Sachant que $r = 5$ et $u_0 = 1$, calculer u_4 et S_{10}.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1+5n\ ;\ u_0 = 1\ ;\ u_4 = 21\ ;\ u_{10} = 51$$

$$S_{10} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = 11 \times \frac{u_0 + u_{10}}{2} = 11 \times 26 = 286$$

   (b) Sachant que $u_3 = 5$ et $S_4 = 15$, déterminer r et u_0.

$$u_3 = 5 = u_0 + 3r\ (1)$$

$$S_4 = 5 \times \frac{u_0 + u_4}{2} = 15 \iff u_0 + u_4 = 6 \iff u_0 + u_0 + 4r = 6 \iff u_0 + 2r = 3\ (2)$$

   De (1) et (2), on en déduit que $r = 2$ et $u_0 = -1$.

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est cette fois une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
   (a) Sachant que $u_0 = 3$ et $q = -5$, calculer u_3 et S_3.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3(-5)^n\ ;\ u_3 = 3(-5)^3 = -375$$

$$S_3 = 3 \times \frac{1-(-5)^4}{1-(-5)} = -312$$

   (b) Sachant que $u_0 = 1$ et $q = 2$, déterminer le rang N pour lequel $S_N = 65\,535$.

$$u_n = 1 \times 2^n = 2^n\ ,\ S_N = 1 \times \frac{1-2^{N+1}}{1-2} = 2^{N+1} - 1$$

$$S_N = 2^{N+1} - 1 = 65535 \iff 2^{N+1} = 65536 \iff N+1 = \frac{\ln(65536)}{\ln(2)} = 16 \iff N = 15$$

Exercice 2

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 7$.
   Donc, $u_n = 7 + 5n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $S_{n-1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = n \times \dfrac{7+7+5(n-1)}{2} = \dfrac{n(5n+9)}{2}$.
3. $S' = u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = n \times \dfrac{12+7+5(2n-1)}{2} = n(5n+7)$.

Exercice 3

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :
$u_0 = 2$ et pour $n \geq 0$ la relation (R) : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$.

1. $u_0 = 2\ ;\ u_1 = -\dfrac{1}{3}\ ;\ u_2 = -\dfrac{1}{9}$
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4u_n - 6n + 15$

$$\begin{aligned} v_{n+1} = 4u_{n+1} - 6(n+1) + 15 &\iff v_{n+1} = 4(\frac{1}{3}u_n + n - 1) - 6(n+1) + 15 \\ &\iff v_{n+1} = \frac{4}{3}u_n + 4n - 4 - 6(n+1) + 15 \\ &\iff v_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - 2n + 5 \\ &\iff v_{n+1} = \frac{1}{3}(4u_n - 6n + 15) \\ &\iff v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 23$ et de raison $\frac{1}{3}$.

3. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 23\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $u_n = \frac{23}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{15}{4} = \frac{1}{4}\left(23\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6n - 15\right)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{23}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{15}{4}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{23}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\frac{3}{2}k - \sum_{k=0}^{n}\frac{15}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{23}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{15}{4}(n+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{69}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 - 12n - 15}{4}$$

Exercice 4

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :
$u_0 = a \in \mathbb{N}$ et pour $n \geq 0$: $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2+5u_n}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie pour $u_0 = -\frac{2}{5}$.
2. Si $a = 0$ alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$ avec $v_0 = b \in \mathbb{N}$ et $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2+5u_n}{3u_n} = \frac{2}{3u_n} + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}v_n + \frac{5}{3}$.
   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $\iff b = \frac{2}{3}b + \frac{5}{3} \iff b = 5$.
   (c) On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = v_n - 5$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} = v_{n+1} - 5 &\iff w_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{5}{3} - 5 \\ &\iff w_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - \frac{10}{3} \\ &\iff w_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n - 5) \\ &\iff w_{n+1} = \frac{2}{3}w_n \end{aligned}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $w_0 = v_0 - 5$ et de raison $\frac{2}{3}$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (v_0 - 5)\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $v_n = (v_0 - 5)\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5$.

Donc $\lim v_n = 5$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$ et $\lim u_n = \frac{1}{5}$.

Donc les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 5

Au cours d'une année , appelée année 0, un industriel sort un article qu'il vend au prix initial P_0.
Le prix de vente de cet article suit au cours des années la loi suivante :
$P_n = 0,4P_{n-1} + 120$ dans laquelle P_n désigne le prix de l'article au cours de l'année n.

1. (P_n) est une suite arithmético-géométrique donc $k = -\alpha$ avec α solution de l'équation $\alpha = 0,4\alpha + 120$ soit $\alpha = 200 = -k$. Donc la suite (Q_n), avec $Q_n = P_n - 200$ pour tout $n \geq 0$, est bien une suite géométrique de raison $0,4$ (application directe du cours).
2. (Q_n) est la suite géométrique de raison $0,4$ et de premier terme $Q_0 = P_0 - 200$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = (P_0 - 200)(0,4)^n$ soit $P_n = (P_0 - 200)(0,4)^n + 200$.
3. (P_n) reste constante pour $P_0 = 200$ et dans ce cas $P_n = 200$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Une entreprise propose à ses ingénieurs deux types de contrats relatifs au paiement des primes.
Contrat de type 1 (les primes sont versées à la fin de chaque année) :
1$^{\text{ère}}$ année : 2500 euros puis augmentation de 300 euros chaque année.

$u_1 = 2500$, $u_2 = 2500 + 300$, $u_3 = 2500 + 2 \times 300 \cdots$

$u_n = 2500 + 300(n-1) = 2200 + 300n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Contrat de type 2 (les primes sont versées à la fin de chaque semestre) :
1$^{\text{er}}$ semestre : 1000 euros puis augmentation de 100 euros chaque semestre.

$v_1 = 1000 + (1000 + 100) = 2100$, $v_2 = (1000 + 200) + (1000 + 300) = 2500$, $v_3 = (1000 + 400) + (1000 + 500) = 2900$

$v_n = 2100 + 400(n-1) = 1700 + 400n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Quel est le contrat le plus avantageux ? (discuter suivant le nombre d'années)
$v_n - u_n = 100(n-5)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $n \leq 4$ il faut choisir le contrat 1 (pour avoir de meilleures primes) et si $n \geq 5$ il faut choisir le contrat 2 (pour avoir de meilleures primes).

Exercice 7

On se propose de former au 1$^{\text{er}}$ janvier 2019 un capital d'un montant de C € au moyen de trois annuités de montants A_0, A_1 et A_2 versées respectivement au 1$^{\text{er}}$ janvier 2016, 2017 et 2018.

1. Soit C la valeur du capital formé(=la somme des valeurs acquises de chaque versement).

   $C = A_0(1+r)^3 + A_1(1+r)^2 + A_2(1+r)$
2. Le taux d'intérêt est de 10% ($r = 0,1$).

$$\begin{cases} 11000(1,1)^3 + A_1(1,1)^2 + A_2(1,1) = 39820 \\ A_1 + A_2 = 21810 \end{cases} \iff \begin{cases} (1,1)A_1 + A_2 = 22890 \\ A_1 + A_2 = 21810 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = 10800 \\ A_2 = 11010 \end{cases}$$

Exercice 8

$$C = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)(1+r')} \iff A = \frac{C(1+r)(1+r')}{2+r'}$$

Ce qui donne dans l'application numérique $A = 2310$ €.

Exercice 9

Un emprunt de 10 000 € au taux d'intérêt annuel de 10% est remboursé en n annuités $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1. Sachant que $n = 3$, $A_1 = 0$ et $A_2 = A_3$, déterminer la valeur de l'annuité A_2.

$$10000 = \frac{A_1}{1,1} + \frac{A_2}{(1,1)^2} + \frac{A_3}{(1,1)^3} \iff \frac{A_2}{(1,1)^2} + \frac{A_2}{(1,1)^3} = 10000 \iff A_2 = \frac{10000 \times (1,1)^3}{2,1} \simeq 6338$$

2. Sachant que $n = 10$ et que $A_k = A$ pour tout k (annuités constantes), déterminer la valeur de A.

$$10000 = \frac{A}{1,1} + \frac{A}{(1,1)^2} + \cdots + \frac{A}{(1,1)^{10}} \iff \frac{A}{1,1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1,1}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{1,1}} = 10000 \iff A = \frac{10000}{10\left(1 - \left(\frac{1}{1,1}\right)^{10}\right)} \simeq 1627$$

ou alors ils appliquent directement la formule du cours...mais c'est bien aussi qu'ils la retrouvent...