Tous les résultats de collège que l'on doit savoir en Seconde, Première et Terminale

Analyse

Calculs avec des fractions

Pour $b \neq 0$ et $k \neq 0$ $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$

Pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Pour $b \neq 0$, $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Pour ajouter (ou soustraire) des fractions n'ayant pas le même dénominateur, on commence par les réduire au même dénominateur.

Pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Pour $d \neq 0$, $a\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{d}$

Remarque: L'inverse de k est $\frac{1}{k}$ ($k \neq 0$)

« Diviser, c'est multiplier par l'inverse du deuxième nombre se traduit par l'égalité suivante :

Pour $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

Calculs avec des puissances

a nombre réel , n entier supérieur à 0.

$a^n = a\times a\times a\times\ldots\ldots\ldots\times a\times a$

produit de n facteurs

$a^1=a$ Si a est non nul, $a^0=1$ (convention)

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ (avec a non nul et n entier)

Si a et b *sont* non nul et si n et m sont entiers, alors :

$a^n\times a^m=a^{n+m}$ $(a^n)^m = a^{nm}$ $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$a^n b^n=(ab)^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Un carré est toujours positif.

Calculs avec des radicaux

La racine carrée d'un nombre positif a est le <u>nombre positif</u> dont le carré est égal à a.

Si $a \geqslant 0$ alors $\sqrt{a}^2=\sqrt{a^2}=a$

Pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Pour $a \geqslant 0$ et $b>0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ATTENTION : pour $a>0$ et $b>0$ on a : $\sqrt{a+b}$ distinct de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Calculs algébriques

$a(b+c)=ab+ac$

$a(b-c)=ab-ac$

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Identités remarquables

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

0 est le seul nombre positif et négatif.

Proportionnalité

Les nombres non nuls ***a, b*** et ***c*** sont respectivement proportionnels aux nombres non nuls ***d , e*** et ***f*** si et seulement si $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f} = k$ où la valeur k commune à tous ces rapports est le coefficient de proportionnalité.

Calculs avec des pourcentages

Calculer p% d'un nombre A , c'est multiplier A par $\frac{p}{100}$

Le nombre B représente p % du nombre A ssi $\frac{B}{A}=\frac{p}{100}$

Remarque importante : L'égalité p %= $\frac{p}{100}$ est correcte.

Fonctions affines

a étant un nombre donné, la fonction $x \longrightarrow a\,x$ est la fonction linéaire de coefficient a .
Sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

a et b étant deux nombres donnés , la fonction $x \longrightarrow a\,x+b$ est une fonction affine.
Sa représentation graphique est une droite
a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine.

Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine (il suffit pour cela de choisir b=0)

Formules usuelles

(Ne plus utiliser le symbole × à partir de la Seconde : il alourdit les formules et les calculs)

Périmètre d'un cercle de rayon ***r*** :	$\boldsymbol{P = 2\pi r}$ (c'est la seule formule de périmètre à connaître)
Aire ***A*** d'un rectangle de longueur ***L*** et de largeur ***l*** :	$\boldsymbol{A = Ll}$
Aire ***A*** d'un parallélogramme de base ***b*** et de hauteur ***h*** :	$\boldsymbol{A = bh}$
Aire ***A*** d'un triangle de base ***B*** et de hauteur ***h*** :	$\boldsymbol{A = \frac{bh}{2}}$
Aire ***A*** d'un **trapèze** de bases ***B*** et ***b*** et de hauteur ***h*** :	$\boldsymbol{A = \frac{B+b}{2} \times h}$
Aire ***A*** d'un **disque** de rayon ***r*** :	$\boldsymbol{A = \pi r^2}$
Aire ***A*** d'une **sphère** de rayon ***r*** :	$\boldsymbol{A = 4\pi r^2}$
Volume ***V*** d'un **cylindre** ou d'un **prisme de hauteur** ***h*** dont la base a pour aire ***A*** :	$\boldsymbol{V = Ah}$
Volume ***V*** d'une **pyramide** ou d'un **cône de hauteur** ***h*** dont la base a pour aire ***A*** :	$\boldsymbol{V = \frac{Ah}{3}}$
Volume **V** d'une **boule** de rayon **r** :	$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\pi \boldsymbol{r}^3$

Le périmètre P d'un polygone est la somme des longueurs de tous ses côtés. (aucune formule à apprendre….)

Trigonométrie

Rapports trigonométriques dans un triangle rectangle :

Cosinus d'un angle aigu = $\dfrac{adjacent}{hypoténuse}$; **Sinus** d'un angle aigu = $\dfrac{opposé}{hypoténuse}$

Tangente d'un angle aigu = $\dfrac{opposé}{adjacent}$

Relations : Si x° est la mesure en degré d'un angle aigu d'un triangle rectangle, on a **:** $\boldsymbol{tan\,(x°) = \dfrac{\sin x°}{\cos x°}}$ et $\boldsymbol{sin^2(x°) + cos^2(x°) = 1}$

Géométrie plane

Définitions et propriétés

Cercle

- Si deux points sont sur un cercle alors le centre de ce cercle est à égale distance de ces deux points.
- Si un triangle est rectangle alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle.
- Si un triangle est inscrit dans un demi-cercle et si l'un des côtés est un diamètre du cercle, alors ce triangle est rectangle. (réciproque de la propriété précédente)
- Si C est un cercle de centre O et A un point de ce cercle, on appelle tangente au cercle C en A, la droite passant par A et perpendiculaire à (OA).

Angles

- Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.
- Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure.
- Deux angles alternes internes formés par deux parallèles et une sécante sont de même mesure.
- Deux angles correspondants formés par deux parallèles et une sécante sont de même mesure.

Droites

- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- Si $AC + CB = AB$ alors C est sur le segment $[AB]$. (La réciproque est vraie)
- Si deux droites sont parallèles et possèdent un point commun alors elles sont confondues.

Droites remarquables dans un triangle

- On appelle **médiatrice d'un segment**, l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

La médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment en son milieu et qui lui est perpendiculaire.
Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le **centre du cercle circonscrit** à ce triangle.

- On appelle **bissectrice d'un angle**, l'ensemble des points équidistants des deux demi-droites formant cet angle. La bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le **centre du cercle inscrit** à ce triangle.

- Dans un triangle, on appelle **médiane**, toute droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé **centre de gravité** de ce triangle qui est situé au 2/3 de chaque sommet sur le segment médiane.

- Dans un triangle, on appelle **hauteur**, toute droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé **orthocentre** de ce triangle.

Triangle (a priori, on parle de triangle lorsque les trois sommets ne sont pas alignés : sinon il faut accepter de parler de triangle aplati….)

- Inégalité « triangulaire » : Pour trois points A, B et C du plan , on a : $AB + BC \leqslant AC$ (l'inégalité devient une égalité si et seulement si B est sur le segment $[AC]$.
- Si un triangle est rectangle alors la longueur de la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
- Si dans un triangle, la médiane issue d'un sommet est égale à la moitié de la longueur du côté opposé alors le triangle est rectangle en ce sommet.
- Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
- Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.
- Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté du triangle alors elle passe par le milieu du troisième côté du triangle.

Quadrilatère
(a priori, un quadrilatère est constitué de **quatre points coplanaires**, tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés. Un quadrilatère peut être croisé ou convexe)

Trapèze
Un trapèze est un quadrilatère ayant (au moins) deux côtés parallèles. Le parallélogramme est un cas particulier de trapèze.

Parallélogramme

- **Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux. (définition)**
- Un quadrilatère est un parallélogramme **si et seulement si** ses diagonales se coupent en leur milieu.
- Un quadrilatère *non croisé* est un parallélogramme **si et seulement si** ses angles opposés ont même mesure deux à deux.
- Un quadrilatère *non croisé* est un parallélogramme **si et seulement si** il a deux cotés opposés parallèles et de même longueur.
On retiendra que les deux dernières propriétés caractéristiques sont à éviter car il est difficile de justifier qu'un quadrilatère n'est pas croisé !
- Pour prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme, on peut revenir à la définition ou prouver que deux segments ont le même milieu.

Losange

- **Un losange est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur. (définition)**
- Un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

Remarque : Il y a donc deux méthodes pour prouver qu'un quadrilatère est un losange. Dans chaque cas, il faut prouver dans un premier temps que le quadrilatère est un parallélogramme.

Rectangle

- **Un rectangle est un parallélogramme ayant (au moins) un angle droit. (définition)**
- Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.

Remarque : Il y a donc deux méthodes pour prouver qu'un quadrilatère est un rectangle. Dans chaque cas, il faut prouver dans un premier temps que le quadrilatère est un parallélogramme.

Carré

- **Un carré est un losange ayant un angle droit. (définition)**
- Un losange est un carré si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.
- Un rectangle est un carré si et seulement si deux côtés consécutifs sont de même longueur.
- Un rectangle est un carré si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

Transformations du plan

- A' est l'image de A par la **symétrie de centre O** si et seulement si O est le milieu de [AA']
- A' est l'image de A par la **symétrie d'axe (*d*)** si et seulement si (*d*) est la médiatrice de [AA'].
- A' est l'image de A par la **rotation de centre O et d'angle** α si et seulement si OA=OA' et $\widehat{AOA'} = \alpha$
(sens de rotation précisé dans l'énoncé)

Théorèmes historiques

Théorème de Pythagore : Si un triangle ABC est rectangle en A, alors : $\boldsymbol{AB^2 + AC^2 = BC^2}$

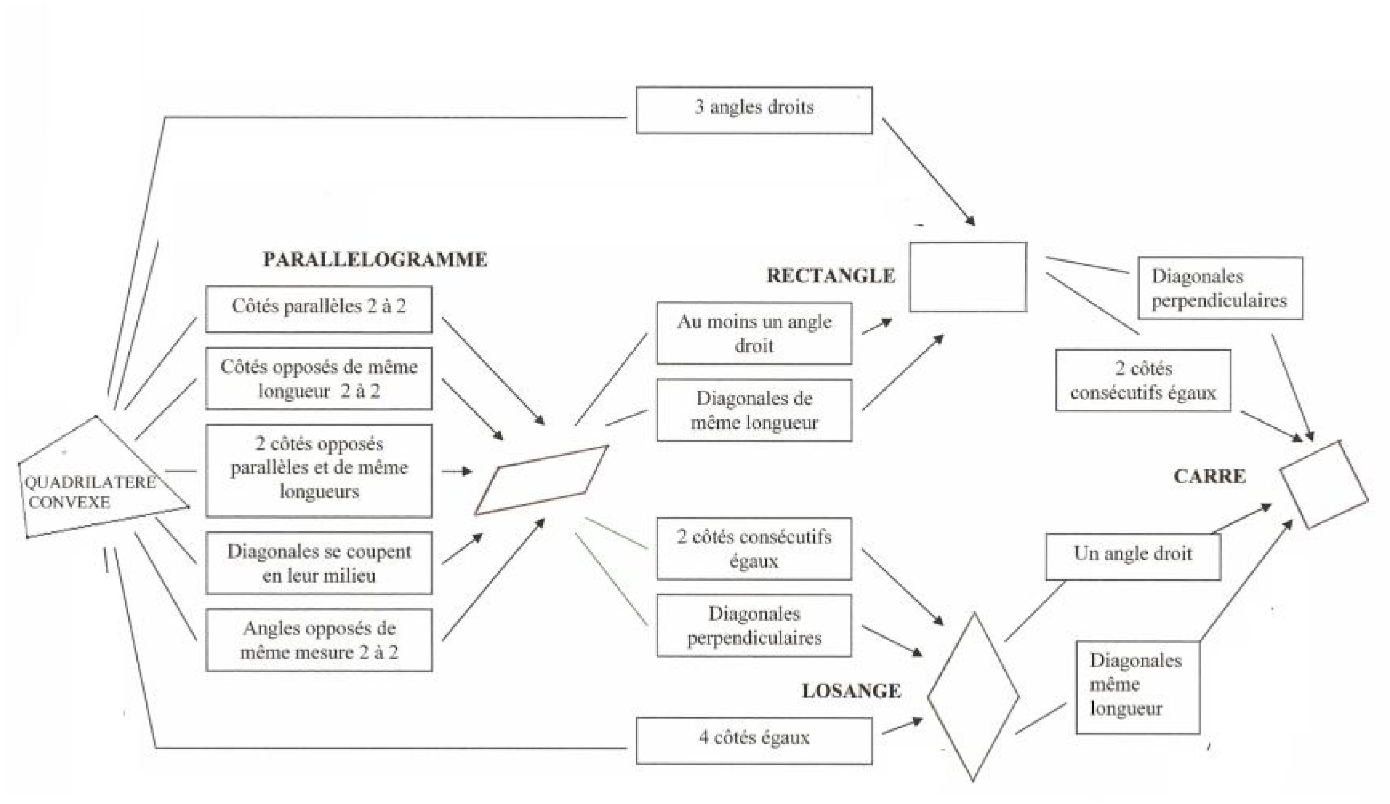
Réciproque du théorème de Pythagore : Dans un triangle ABC, si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors **ce triangle est rectangle en A.**

Contraposée du théorème de Pythagore : Dans un triangle, Si $AB^2 + AC^2$ est distinct de BC^2 alors le triangle n'est pas rectangle en A.

Théorème de Thalès : Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A. Soit B et M deux points de (d), distincts de A. Soit C et N deux points de (d'), distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$

La réciproque est fausse ! En effet, il faut rajouter une condition sur l'ordre dans lequel se situent les points pour écrire une « réciproque ». On a pris cependant la (mauvaise) habitude de parler de réciproque du théorème de Thales...

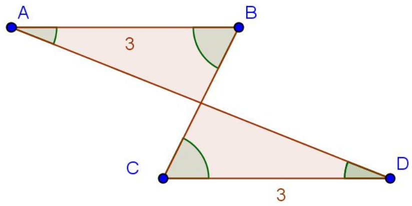
« Réciproque » du théorème de Thales » :
Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A. Soit B et M deux points de (d), distincts de A. Soit C et N deux points de (d') , distincts de A.
Si *A, B, M et A, C, N sont dans le même ordre et* $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$ alors **les droites (BC) et (MN) sont parallèles**.



Vérifiez ! Il existe 44 méthodes différentes pour démontrer qu'un quadrilatère convexe est un carré.

C'est pour cela qu'il faut parfaitement connaître tous les théorèmes afin de choisir celui qui permettra de conclure. (souvent, il existe plusieurs méthodes, mais ce n'est pas systématique….)

Si le quadrilatère n'est pas convexe à coup sûr, on s'abstiendra de raisonner avec les longueurs des côtés ou les angles.
La figure suivante est un bon contre-exemple. En effet, deux côtés opposés du quadrilatère croisé *ABCD* ont même longueur, les angles opposés ont même mesure et pourtant ce quadrilatère n'est pas un parallélogramme. En revanche, *ABDC* est un parallélogramme.



Pour démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle ou un losange, retenir que l'on a d'abord intérêt à prouver que le quadrilatère étudié est un parallélogramme. Dans un deuxième temps, on prouve alors que ce un parallélogramme est particulier.