Développements limités

I / Un exemple : la fonction exponentielle

II / Développement limité au voisinage de 0.

A) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe des réels a_0, a_1, a_2, …….., a_n tels que :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n t^n + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

B) Exemple

Considérons la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$

Après quelques tentatives, on peut trouver les astuces suivantes :

$$f(t) = \frac{1+t-t}{1+t} = 1 - \frac{t}{1+t} = 1 + \varepsilon_0(t)$$

$$f(t) = 1 - t + t - \frac{t}{1+t} = 1 - t + \frac{t^2}{1+t} = 1 - t + t\varepsilon_1(t)$$

$$f(t) = 1 - t + t^2\left(1 - \frac{t}{1+t}\right) = 1 - t + t^2 - \frac{t^3}{1+t} = 1 - t + t^2 + t^2\varepsilon_2(t)$$

On vient d'obtenir trois développements limités de la fonction f au voisinage de 0. On peut remarquer que le développement d'ordre 1 peut s'obtenir à partir de celui de celui d'ordre 2 en supprimant le terme du second degré.

En continuant, on pourrait prouver que :

$$f(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon_n(t)$$

C) Propriété

Soit f admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0

$$\left(f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n t^n + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0\right)$$

Alors : $a_0 = f(0)$, $a_1 = f\,'(0)$ L

La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = a_0 + a_1 t$

<u>Exemple</u> : $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ $\quad f(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon_n(t)$

On peut vérifier que $f(0) = 1$ et que $f\,'(0) = -1$ et enfin que $\mathcal{T}$ a pour équation $y = 1 - t$

D) Un symbole à connaître

$5\,! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$ En général $n! = n(n-1)(n-2).....\times3\times2\times1$

Remarque : $(n+1)! = (n+1)n!$ Par exemple : $6! = 6\times5! = 6\times120=720$

E) Formulaire

On doit connaître les développements limités des fonctions suivantes : on peut consulter le formulaire pour les retrouver.

F) Comment trouver un développement limité

Règle : On peut additionner, soustraire, multiplier et composer des développements limités à condition de bien tenir compte du degré de chaque développement limité.

Exemples : 1) $g(t) = \dfrac{3t-1}{1+t}$. On reconnaît la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$

Comme g(t)= $f(t)\times(3t-1)$, il suffit de multiplier la partie régulière du développement limité de f par $3t-1$.

2) $g(t) = e^t + \dfrac{1}{1+t}$

3) $g(t) = e^{3t}$ On pose le changement de variable $u = 3t$. u a pour limite 0 lorsque t tend vers 0, on peut donc reporter $3t$ dans le développement limité de e^u au voisinage de 0.

III / Interprétation géométrique d'un développement limité

A) Exemples

1) Reprenons la fonction f que l'on a choisie comme exemple.

$f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ $f(t) = 1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+..................+(-1)^n t^n + t^n\varepsilon_n(t)$

On cherche la position de $\mathcal{T}$ par rapport à $\mathcal{C}$.

On étudie donc le signe de $f(t)-(1-t)$.

$f(t)-(1-t) = t^2+t^2\varepsilon(t) = t^2\,(1+\varepsilon(t))$. Le signe de $1+\varepsilon(t)$ est proche de 1 lorsque t est proche de 0 puisque $\lim\limits_{t\to0}\varepsilon(t) = 0$. On en déduit la position locale.

2) $f(t) = \ln(1+t)+e^t$

B) Théorème

Si f admet un développement limité d'ordre n ($n \geqslant 2$), alors la position relative de la courbe et de sa tangente au point d'abscisse 0 est **localement** déterminée par le signe du premier terme non nul $a_k t^k$ $(k \geqslant 2)$

Si k est impair, la tangente traverse la courbe, si k est pair la tangente reste localement au dessus ou au dessous de la courbe.