COURBES DE BÉZIER

Introduction : Vers 1962, M. Pierre Bézier, ingénieur chez Renault, met au point une méthode pour obtenir des courbes ou des surfaces. Cette méthode doit être utilisable dans un ordinateur, elle doit être simple et algorithmique.
On parle de C.A.O (Conception assistée par ordinateur)

I Première partie : la partie géométrique

L'idée directrice est de tracer une courbe en déplaçant le barycentre d'un système de points, appelés points de contrôle.
Une fois cette courbe obtenue, on modifie à l'écran la position des points de contrôle (d'où leur nom), ce qui permet de déformer la courbe jusqu'à l'obtention du profil recherché.

Étape n°1 : A_0 et A_1 étant deux points fixés, on considère le barycentre M des points A_0 et A_1 affectés des coefficients $1-t$ et t, où t est un réel variable de l'intervalle $[0;1]$

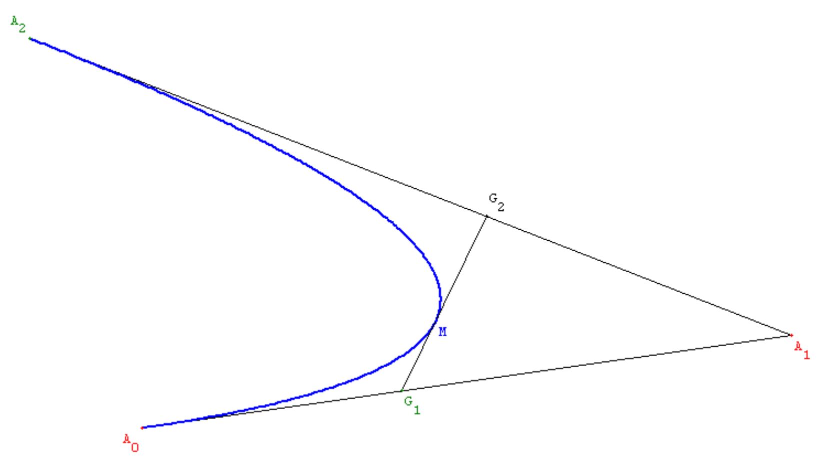
Remarque : Le lieu géométrique des points M lorsque t varie dans l'intervalle $[0;1]$, est le segment $[A_0A_1]$ tout entier. A_0 et A_1 s'appellent les deux points de contrôle. La courbe obtenue est ici tout simplement un segment.

Étape n°2 : On donne maintenant trois points de contrôle A_0, A_1 et A_2.

1. On considère dans un premier temps les points :
G_1, barycentre de $(A_0, 1-t)$ et (A_1, t)
G_2, barycentre de $(A_1, 1-t)$ et (A_2, t)

2. On considère ensuite le point :
M, barycentre de $(G_1, 1-t)$ et (G_2, t)

Le lieu géométrique des points M lorsque t varie dans l'intervalle $[0;1]$ est appelé courbe de Bézier de degré 2
On devine que le lieu géométrique des points M est une parabole. Il semblerait d'autre part que les droites (A_0A_1) et (A_1A_2) soient tangentes à la courbe de Bézier.



II Équation des courbes obtenues avec trois points de contrôle

Étape n°3 : On reprend l'exemple vu à l'étape 2.

- Exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}_1$ et $\overrightarrow{OG}_2$
- Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{OG}_1$ et $\overrightarrow{OG}_2$ en fonction de $\overrightarrow{OA}_0$, $\overrightarrow{OA}_1$ et $\overrightarrow{OA}_2$
- En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des trois vecteurs $\overrightarrow{OA}_0$, $\overrightarrow{OA}_1$ et $\overrightarrow{OA}_2$
- Donner alors les coordonnées du points M en fonction de celles des trois points de contrôle A_0, A_1 et A_2. On notera celles-ci $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.
- En déduire les équations paramétriques de la courbe de Bézier.
- Etudier cette courbe de Bézier dans les trois cas suivants.

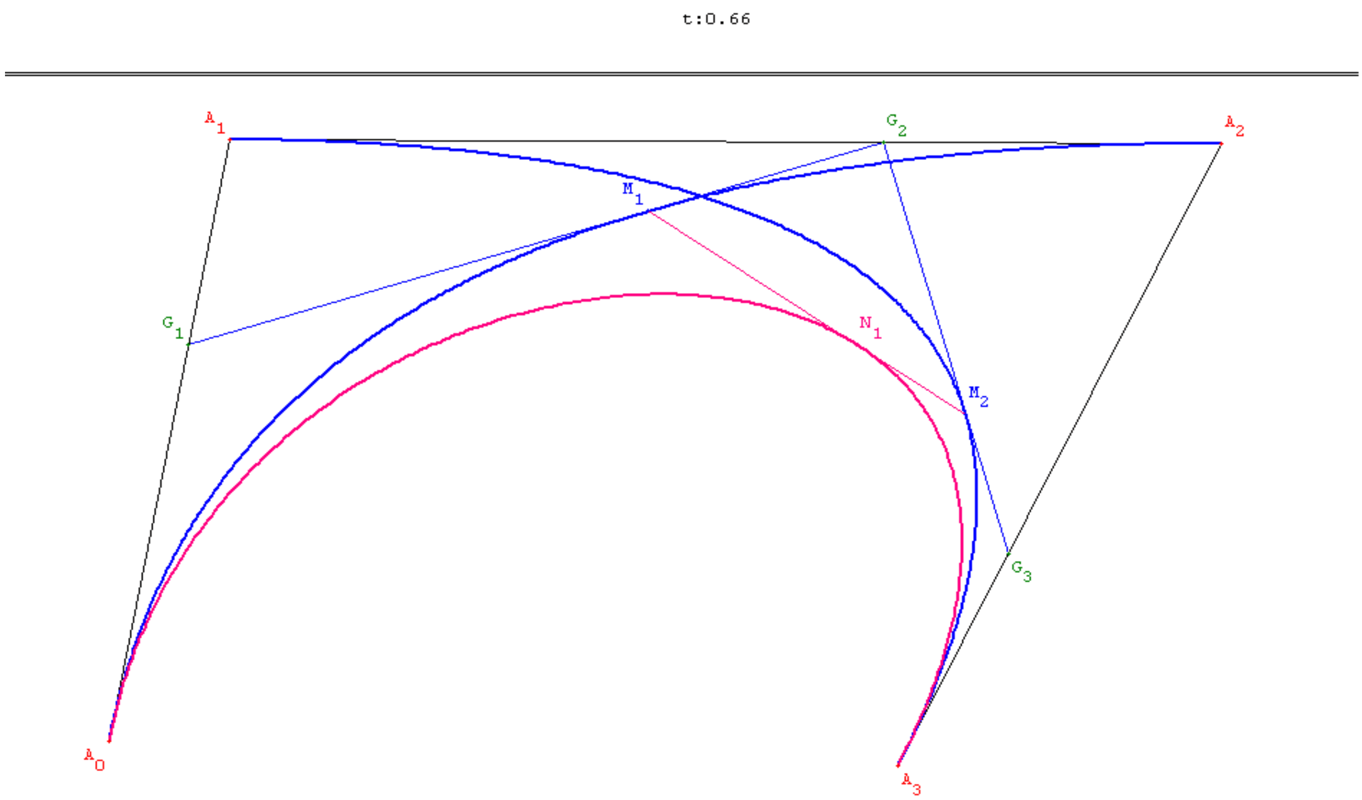
  a. $A_0\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ $A_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A_2\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

  b. $A_0\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ $A_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A_2\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

  c. $A_0\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $A_1\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A_2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Étape n°4 : Démontrer dans l'exemple a. ci-dessus, que la courbe de Bézier est un arc de parabole. Vérifier que cette courbe est tangente aux droites (A_0A_1) et (A_1A_2), mais aussi à la droite ($G_1\,G_2$).

III Équation des courbes obtenues avec quatre points de contrôle



<u>Étape n°5</u> : Le principe est de trouver un procédé facilement généralisable et tel que les équations paramétriques soient elles aussi généralisables.
G_1, G_2, G_3 sont trois points décrivant une courbe de Bézier de degré 1.
M_1, M_2 sont deux points décrivant une courbe de Bézier de degré 2.
N_1 est un point décrivant une courbe de Bézier de degré 3.
Tous ces points sont des barycentres définis avec les mêmes coefficients.
Une animation complète fait apparaître six courbe de Bézier.

Intéressons nous à la nouvelle courbe de Bézier de degré 3.

- Exprimer $\overrightarrow{ON_1}$ en fonction de $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$

- Reprendre l'expression de $\overrightarrow{OM_1}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$ (obtenue à l'étape n°3)

- Donner de même une expression de $\overrightarrow{OM_2}$.

- En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{ON_1}$ en fonction des quatre vecteurs $\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{OA_1}$ $\overrightarrow{OA_2}$ et $\overrightarrow{OA_3}$

- Donner alors les coordonnées du points N_1 en fonction de celles des quatre points de contrôle A_0, A_1, A_2 et A_3 . On notera celles-ci $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$

- En déduire les équations paramétriques de la courbe de Bézier de degré 3.

- Étudier la courbe de Bézier dans le cas suivant :
  $A_0\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ $A_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A_2\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ $A_3\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

IV Équation des courbes obtenues avec n points de contrôle

Observons les formules obtenues pour les courbes de Bézier de degré 0, 1, 2 et 3.

$\overrightarrow{OM} = 1.\overrightarrow{OA}_0$ (degré 0)

$\overrightarrow{OM} = (1-t)\ \overrightarrow{OA}_0 + t\ \overrightarrow{OA}_1$ (degré 1)

$\overrightarrow{OM} = (1-t)^2\ \overrightarrow{OA}_0 + 2t(1-t)\ \overrightarrow{OA}_1 + t^2\ \overrightarrow{OA}_2$ (degré 2)

$\overrightarrow{OM} = (1-t)^3\ \overrightarrow{OA}_0 + 3t(1-t)^2\ \overrightarrow{OA}_1 + 3t^2(1-t)\ \overrightarrow{OA}_2 + t^3\ \overrightarrow{OA}_3$ (degré 3)

Les coefficients dans chacun des cas sont des polynômes de la variable t de même degré. Ces polynômes comportent les facteurs t et $1-t$ avec le degré de t qui augmente d'une unité et le degré de $1-t$ qui diminue d'une unité.
Ces polynômes s'appellent des polynômes de Bernstein.
Leur notation est $B_{k,n}(t)$ où n est le degré du polynôme. ($k \leq n$)

Par exemple : $B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$ $B_{2,2}(t) = t^2$

La somme des polynôme de Bernstein de même degré est égale à la constante 1 dans chacun des quatre cas. (vérifier pour les quatre premiers cas)

On démontre que la formule générale est :

$\overrightarrow{OM} = (1-t)^n\ \overrightarrow{OA}_0 + \ldots.t(1-t)^{n-1}\ \overrightarrow{OA}_1 + \ldots..t^2(1-t)^{n-2}\ \overrightarrow{OA}_2 + \ldots + \ldots. + \ldots. + t^n\ \overrightarrow{OA}_n$

Cette formule est facile à retenir. Il reste à retrouver les facteurs en pointillés.

Utilisons la notation des polynômes de Bernstein pour écrire une formule soignée.

Les deux formules à retenir pour une courbe de Bézier de degré n.

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \sum_{k=0}^{k=n} B_{k,n}(t)\overrightarrow{OA}_k} \qquad \boxed{B_{k,n}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}}$$

Comment trouver l'expression des polynômes de Bernstein ?

Méthode n°1 : Le triangle de Pascal

Méthode n°2 : La formule $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$ où $n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.3\times2\times1.$

Remarques: C'est C_n^k qui permet de calculer le nombre de résultat au Loto National (n=42 et k=6)

Examen : La formule donnant $\overrightarrow{OM}$ est généralement donnée dans le texte, C_n^k se trouvait dans les anciens formulaires (paragraphe probabilités)……..

Exemple : On étudie la courbe de Bézier de degré 5, avec les six points de contrôle :

$$A_0\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}\ A_1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\ A_2\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}\ A_3\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\ A_4\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\text{ et }A_5\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$$

On calcule d'abord les réels C_6^k avec k variant de 0 à 5.

On écrit alors la formule générale du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On en déduit immédiatement les équations paramétriques de la courbe de Béziers.

Les polynômes étant ici de degré 5, l'étude de la dérivée est problématique.

Utiliser Sinequanon pour obtenir la courbe.

C'est pour cela que l'on se contente en fait souvent de courbe de Bézier de degré 3. Lorqu'une courbe de degré 3 est obtenue à l'ordinateur, il suffit ensuite de récupérer les équations paramétriques de degré 3 à l'aide des coordonnées des points de contrôle. Les dérivées étant de degré 2, les calculs sont simples et facilement programmables.

Courbe de Bézier de degré 5