Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2003

Exercice 1 **9 points**

Les parties A, B et C peuvent être traitées de fa çon indépendante.

A Résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad : \quad y'' + 5y' + 6y = 4\text{e}^{-2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' la fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $\quad y'' + 5y' + 6y = 0$.
2. Vérifier que la fonction $g(x) = 4x\text{e}^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $h(0) = 3$ et $h'(0) = -2$.

B Étude d'une fonction
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (4x+3)\text{e}^{-2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\text{e}^{-2x} = 0$.
2. **a.** Montrer par le calcul que la dérivée f' de f est définie par : $f'(x) = (-8x-2)\text{e}^{-2x}$.
   b. Déterminer suivant les valeurs de x le signe de f'.
   c. En déduire les variations de la fonction f. On regroupera les résultats dans un tableau de variations en faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
3. **a.** À l'aide du développement limité de $t \longmapsto \text{e}^t$ à l'ordre 2 au voisinage de 0, donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \longmapsto \text{e}^{-2x}$
   b. En déduire que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x)$ est :
   $$f(x) = 3 - 2x - 2x^2 + x^2\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$
4. **a.** Déduire de la question précédente l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en 0.
   b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de T au voisinage de 0.
5. Tracer $\mathscr{C}$ et T.

C. Calcul intégral

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur exacte de l'intégrale I $= \displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer l'aire en cm^2 à 10^{-2} près par défaut, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$.

Exercice 2 **5 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Une entreprise fabrique des jetons destinés à un établissement de jeux. On note D la variable aléatoire prenant pour valeur le diamètre en millimètres des jetons et E la variable aléatoire prenant pour valeur l'épaisseur en millimètres des jetons.

On suppose que les variables aléatoires D et E sont indépendantes.

Le cahier des charges de cette entreprise indique que le diamètre doit être égal à $29 \pm 0,4$ mm et que l'épaisseur doit être égale $2 \pm 0,1$ mm.

On admet que la variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne 29 et d'écart type $0,2$ et que la variable aléatoire E suit la loi normale de moyenne 2 et d'écart type $0,04$.

1. Calculer la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait un diamètre conforme au cahier des charges.
2. Calculer la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait une épaisseur conforme au cahier des charges.
3. En déduire la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production satisfasse les deux conditions du cahier des charges.

Partie B

On suppose que 6 % des jetons ne correspondent pas au cahier des charges.

On prélève au hasard dans la production 100 jetons. Vu la quantité de jetons produite par l'entreprise, on peut assimiler ce prélèvement à un tirage successif avec remise.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jetons non conformes au cahier des charges.

1. Déterminer la loi de probabilité de X en justifiant la réponse et en précisant les paramètres de cette loi.
2. Quelle est la probabilité d'avoir un seul jeton non conforme ?
3. On suppose que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson,
   a. Déterminer le paramètre de cette loi.
   b. Déterminer la probabilité d'avoir exactement 3 jetons ne répondant pas au cahier des charges.
   c. Déterminer la probabilité d'avoir au moins 4 jetons ne répondant pas au cahier des charges.

Exercice 3 **6 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Soit $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
On considère la courbe H définie par les équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & 4t^3+15t^2-18t+1 \\ y & = & g(t) & = & -2t^3+6t \end{array}\right.$$

où t est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0~;~1]$,

Partie A

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur $[0~;~1]$ et rassembler les résultats obtenus dans un même tableau. On indiquera en particulier les images de 0, $\dfrac{1}{2}$ et 1 ainsi que la valeur des dérivées en ces points.
2. Soit A$(1~;~0)$ et B$(-5~;~2)$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est tangent à H en A.
3. Tracer H ainsi que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Partie B

En fait, la courbe H est une courbe de Bézier définie à partir de quatre points de contrôle A, B, C et D, les coordonnées de D étant $(2~;~4)$.

1. Vérifier que la courbe part bien de A pour arriver en D.
2. On cherche dans cette question à déterminer les coordonnées du point C.
   a. En utilisant le fait que $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ est tangent à H en D, déterminer l'ordonnée de C.
   b. On rappelle qu'une courbe de Bézier à 4 points de contrôle est définie par la relation :

   $$(*) \quad \overrightarrow{\mathrm{O}M(t)} = \Sigma_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_i},$$

   où les P_i sont les points de contrôle et $B_{i,3}(t)$ sont les polynômes de Bernstein définis par $B_{i,3}(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i(1-t)^{n-i}$ avec $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

   i. Donner l'expression développée des polynômes de Bernstein : $B_{0,3}(t)$, $B_{1,3}(t)$, $B_{2,3}(t)$ et $B_{3,3}(t)$.

   ii. À l'aide de l'égalité (*), déterminer x_{C} l'abscisse de C. Tracer alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$.