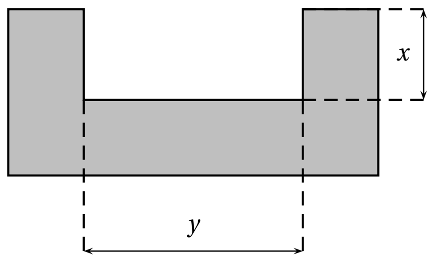
Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2004

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique, en grande série, des pièces mécaniques, dont une vue en coupe est représentée ci-contre.
Une telle pièce est acceptée après contrôle si sa cote x, exprimée en millimètres, est comprise dans l'intervalle $[49,8\,;\,50,2]$ et si sa cote y, exprimée en millimètres, est comprise dans l'intervalle $[59,9\,;\;60,1]$.



Dans cet exercice les résultats approchés seront à arrondir à 10^{-2}.

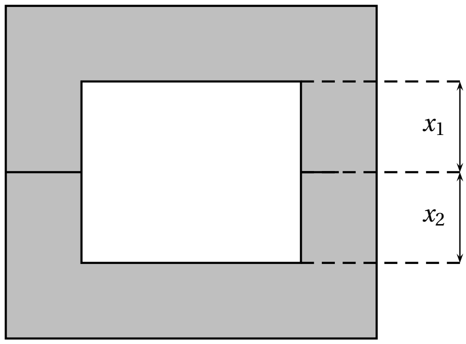
A. Loi normale

1. On suppose que la variable aléatoire X, qui à une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée associe sa cote x, suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type $0,09$.
   Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée soit acceptée par le contrôle pour la cote x.
2. On suppose maintenant que la variable aléatoire Y, qui à une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée associe sa cote y, suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart type σ.
   Déterminer la valeur de σ pour qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée soit acceptée par le contrôle, pour la cote y, avec une probabilité égale à $0,95$.

B. Évènements indépendants
On prélève une pièce au hasard dans un lot de ce type de pièces.
On appelle E_1 l'évènement : « la pièce est défectueuse pour la cote x » et E_2 l'évènement : « la pièce est défectueuse pour la cote y ».
On suppose que les deux évènements E_1 et E_2 sont indépendants, que $P(E_1) = 0,03$ et que $P(E_2) = 0,05$.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit défectueuse pour les deux cotes x et y.
2. Une pièce est jugée défectueuse si elle l'est pour au moins une des deux cotes x ou y. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit défectueuse.

C. Somme de deux variables aléatoires
On prélève au hasard deux pièces dans un stock, pour les assembler comme l'indique la figure ci-dessous. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de deux pièces.



On désigne par X_1 la variable aléatoire qui associe à la première pièce tirée sa cote x_1, et par X_2, la variable aléatoire qui associe à la deuxième pièce tirée sa cote x_2.
On admet que les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi normale de moyenne 50 et d'écart type $0,09$ et que X_1 et X_2 sont indépendantes.
On appelle Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2$.

1. Justifier que Z suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type $0,13$.
2. Un tel assemblage est jugé défectueux si la somme $x_1 + x_2$ est inférieure à $99,8$ mm.
   Calculer la probabilité qu'un tel assemblage soit défectueux,

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle

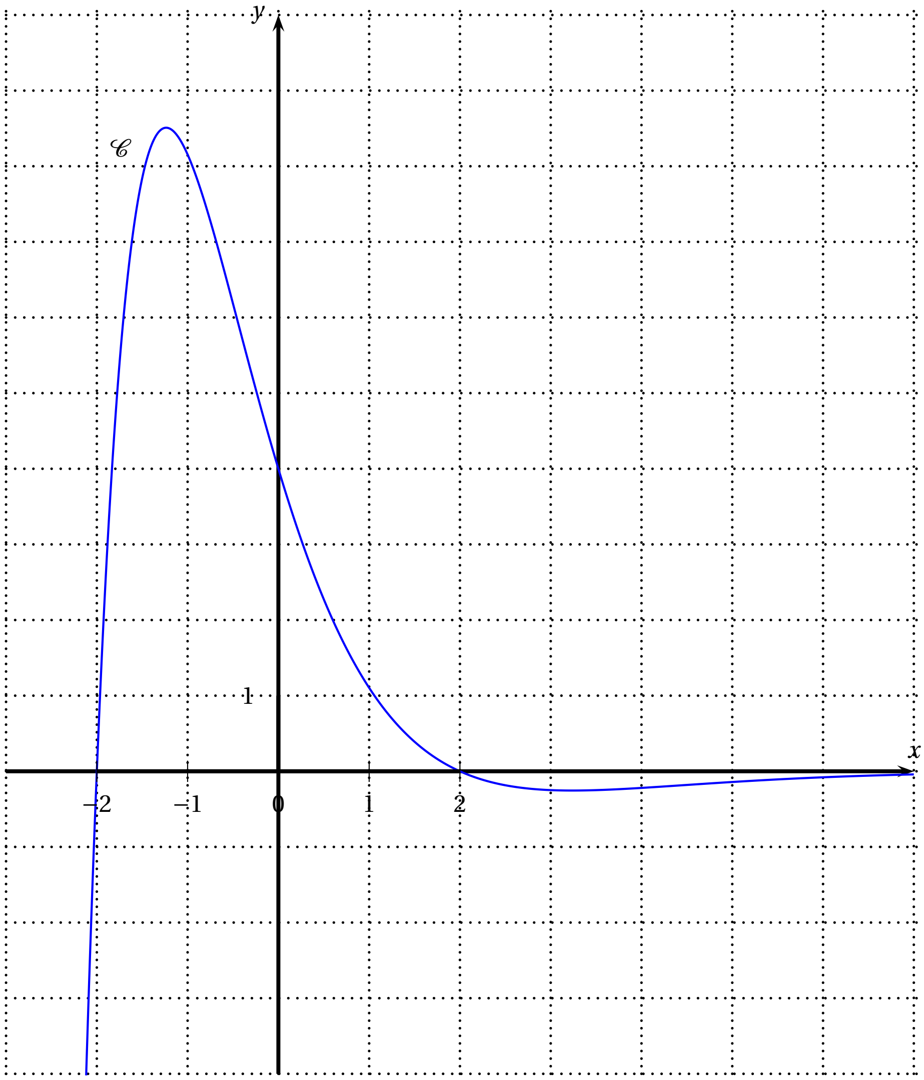
$$\text{(F)} \quad : \quad y'' + 2y' + y = -2\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Determiner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) $\ y'' + 2y' + y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 4$ et $f(2) = 0$.

B. Étude d'une fonction
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(4 - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$



1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Que peut-on déduire du a. pour la courbe $\mathscr{C}$?

3. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(x^2 - 2x - 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$. (On donnera les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x) = 0$.)

c. En déduire le tableau de variations de f. On fera figurer dans ce tableau les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} des éventuels extremums de f.

4. **a.** Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

b. Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = 4 - 4x + x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

c. Déduire du b. une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

d. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

1. La fonction f définie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f''(x) - 2f'(x) - 2\mathrm{e}^{-x}$.
En déduire qu'une primitive F de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \left(x^2 + 2x - 2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. On note $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = 2\mathrm{e}^2 + 6\mathrm{e}^{-2}$.
3. Donner une interprétation graphique de I.