Brevet de technicien supérieur Conception de produits industriels session 2005

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties A, B, C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A.

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) \quad : \quad y' + y = -\mathrm{e}^{-x}.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) \quad : \quad y' + y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).
4. Déterminer la solution particulière f_1 de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie la condition initiale $f_1'(0) = 0$.

B.

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$.

1. On note $I = \displaystyle\int_0^{0,1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 1,1\mathrm{e}^{-0,1} - 1$.
2. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction g est :

$$g(x) = -x + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

3. On note $J = \displaystyle\int_0^{0,1} \left(-x + x^2 - \frac{x^3}{2}\right)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $J = -\dfrac{0,112\ 3}{24}$.
4. On considère l'affirmation suivante : le nombre $I - J$ est inférieur à 10^{-6}. Cette affirmation est-elle vraie ?

C.

On considère l'équation différentielle

$$(E_2) \quad : \quad y'' - y = 2\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 0$.
2. On admet que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_2). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2).
3. Déterminer la solution particulière f_2 de l'équation différentielle (E_2) qui vérifie les conditions initiales $f_2(0) = 0$ et $f_2'(0) = 0$.

Exercice 2 **7 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Dans le cadre d'accords sur la formation professionnelle, une grande entreprise a proposé à ses personnels un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de conceptior industrielle.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à10^{-2}.

A.

On note E l'évènement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage ».

On suppose que $P(E) = 0,3$.

On tire au hasard le nom de n personnes de cette entreprise. On suppose l'effectif suffisamment important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

1. Dans celle question on prend $n = 15$.
   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 15 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.
   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres,
   b. Déterminer la probabilité qu'une personne au plus parmi les 15 dont le nom a été tiré au hasard ait suivi le stage.
2. Dans cette question on prend $n = 150$.
   On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 150 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.
   On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,3$.
   On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.
   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.
   a. Justifier les paramètres de cette loi normale.
   b. Calculer la probabilité qu'au plus 40 personnes, parmi les 150 dont le nom a été tiré au hasard, aient suivi le stage, c'est à dire calculer $P(Z \leqslant 40,5)$.

B.

Dans cette entreprise 45 % du personnel a un niveau de qualification supérieur ou égal à « bac + 2 ».

L'évènement A : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a un niveau supérieur ou égal à bac + 2 » a donc pour probabilité $P(A) = 0,45$.

On rappelle que l'évènement E : « une personne de l'entreprise dont le nom a été

tiré au hasard a suivi le stage » a pour probabilité $P(E) = 0,3$.
Enfin, 35 % des personnes dont le niveau de qualification est supérieur ou égal à « bac + 2 » ont suivi le stage. Ce qui permet d'en déduire la probabilité conditionnelle $P_A(E) = 0,35$,ou $P(E|A) = 0,35$.

1. Calculer la probabilité de l'évènement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage et a un niveau de qualification supérieur ou égal à bac + 2 ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « une personne dont le nom a été tiré au hasard parmi les noms des personnes ayant suivi le stage a un niveau supérieur ou égal à bac + 2 ».

Exercice 3 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

À tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;\,2]$, on associe le point $M(t)$ de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & t^3 - 3t^2 + 3t \\ y(t) & = & g(t) & = & [\ln(1+t)]^2. \end{array}\right.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenus lorsque t varie dans $[0\,;\,2]$.

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur [0 ; 21 et regrouper les résultats dans un même tableau.
2. Donner un vecteur directeur pour chacune des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points $M(0)$, $M(1)$ et $M(2)$, obtenus pour $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$.
3. Tracer les tangentes définies à la question **2.** et la courbe $\mathscr{C}$.