Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2006

Exercice 1 **8 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E)\quad :\quad y'' + 2y' + 5y = -5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0)\quad :\quad y'' + 2y' + 5y = 0.$$

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3+2x^2-x$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin 2x - x^3 + 2x^2 - x.$$

1. À l'aide du développement limité de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, à l'ordre 3 au voisinage de 0, écrire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.
2. Écrire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \sin 2x$.
3. En déduire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin 2x$.
4. En déduire que le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

5. Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse zéro.
6. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse zéro.

Exercice 2 **5 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une usine fabrique, en grande quantité, un certain type de pièces métalliques pour l'industrie.

A. Probabilités conditionnelles

Les pièces sont produites dans deux ateliers appelés « atelier 1 » et « atelier 2 ».
L'atelier 1 produit chaque jour 250 pièces et l'atelier 2 produit chaque jour 750 pièces.
On admet que 1 % des pièces produites par l'atelier I sont défectueuses et que 2 % des pièces produites par l'atelier 2 sont défectueuses.
On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des 1 000 pièces produites par les deux ateliers pendant une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les évènements suivants :

A : « la pièce prélevée provient de l'atelier 1 » ;
B : « la pièce prélevée provient de l'atelier 2 » ;
D : « la pièce prélevée est défectueuse ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé $P(A)$, $P(B)$, $P(D/A)$ et $P(D/B)$. (On rappelle que $P(D/A) = P_A(D)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. En déduire la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée soit défectueuse.

B. Loi binomiale
Dans cette question, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

On considère un stock important de pièces de ce modèle.
On note E l'évènement : «une pièce prélevée au hasard dans le stock est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,02$.
On prélève au hasard dix pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de dix pièces. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de dix pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce de ce prélèvement ne soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.

Exercice 3 **7 points**

On envisage de créer une nouvelle police de caractère. On s'intéresse plus précisément à la lettre P et on utilise des courbes de Bézier pour définir les contours de cette lettre.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 centimètres.

1. On souhaite construire la courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ définie par les points dc définition suivants donnés par leurs coordonnées $A_0(0~;~3)$; $A_1(4~;~3)$; $A_2(4~;~6)$ et $A_3(0~;~6)$.
   On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de définition $A_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que

$$\overrightarrow{\text{O}M(t)} = \sum_{0}^{n} B_{i,\,n}(t)\overrightarrow{\text{O}A_i} \text{ où } B_{i,\,n}(t) = \text{C}_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

a. Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,\,3}(t)$, avec $0 \leqslant i \leqslant 3$.

b. On note $\left(f_1(t),\ g_1(t)\right)$ les coordonnées du point $M_1(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$.
Vérifier que, pour tout i de $[0\,;\,1]$, $f_1(t) = 12t - 12t^2$.
On admettra dans la suite de l'exercice que $g_1(t) = 3 + 9t^2 - 6t^3$.

Un système d'équations paramétriques de la courbe $\mathscr{C}_1$ est donc :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & 12t - 12t^2 \\ y & = & g_1(t) & = & 3 + 9t^2 - 6t^3 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1]$$

c. Étudier les variations de f_1 et g_1 sur $[0\,;\,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

d. Préciser les coordonnées des points de $\mathscr{C}_1$ où les tangentes â $\mathscr{C}_1$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

e. Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$ et les tangentes parallèles aux axes sur une feuille de papier millimétré.

2. Soit $\mathscr{C}_2$ une courbe de Bézier définie par les trois points de définition suivants donnés par leurs coordonnées : $A_0(0\,;\,3)$; $A_4\left(0\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$; $A_5(-2,\,;\,0)$.
La courbe $\mathscr{C}_2$ est définie paramétriquement par :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_2(t) & = & 2t^2 \\ y & = & g_1(t) & = & 3 - \dfrac{11}{2}t + \dfrac{5}{2}t^2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1]$$

Le tableau des variations conjointes de f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		1
$f_2'(t)$	0	$-$	-4
$f_2(t)$	0	$\searrow$	-2
$g_2'(t)$	$-\frac{11}{2}$	$-$	$-\frac{1}{2}$
$g_2(t)$	3	$\searrow$	0

a. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point A_5.
Quelle est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ en A_0 ?

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}_1$. Construire la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ en A_5 ainsi que le point A_4 et le segment $[A_0A_3]$.