Brevet de technicien supérieur Conception de produits industriels session 2007

Exercice 1 **8 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad : \quad y'' + 2y' + y = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par

$$f(x) = 2\text{e}^{-x}\sin\frac{1}{2}x.$$

1. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \text{e}^{-x}$.

   b. Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \sin\frac{1}{2}x$.

   c. Déduire du 1 et du 2 que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = x - x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

2. Déduire dc la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse zéro.
3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse zéro.

Exercice 2 **6 points**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,3]$ par

$$f(x) = 2\text{e}^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative dc f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 4 cm.

A. Étude des variations et courbe représentative

1. Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Donner la valeur approchée arrondie a 10^{-2} de $f(3)$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $]0\,;\,3]$, $f'(x) = \dfrac{\text{e}^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

   b. En déduire les variations de f sur $]0\,;\,3J$.

3. On admet qu'à l'origine du repère la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est l'axe des ordonnées. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré,

B. Calcul intégral

On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses. On désigne par V le volume en unités de volume de ce solide.

On admet que $V = \displaystyle\int_0^3 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $V = \displaystyle\int_0^3 4\pi x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$V = 4\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right).$$

3. Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V.

Exercice 3 **8 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 2 centimètres.

On souhaite construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré. Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$:

$$P_1(0\,;\,1)\ ;\ P_2(2\,;\,1)\ ;\ P_3(4\,;\,3)\ \text{ et } P_4(6\,;\,1).$$

1. On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour t appartenant à $[0\,;\,1]$ par :

$$R_i(t) = 3\sum_{j=0}^{j=2-i}(-1)^j\,\frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}.$$

Montrer que, pour tout t de $[0\,;\,1]$, $R_0(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + \dfrac{1}{2}$. (**On pourra utiliser ce résultat dans la suite de l'exercice**)

Dans la suite de cet exercice, on admet que, pour tout t de [0 ; 1] :

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad R_2(t) = \frac{1}{2}t^2.$$

2. La courbe B-spline Γ cherchée est la réunion de deux arcs de courbe Γ_1 et Γ_2.

Γ_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M_1(t)} = R_0(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_1(t)} + R_1(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_2(t)} + R_2(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_3(t)}.$$

Γ_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M_2(t)} = R_0(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_2(t)} + R_1(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_3(t)} + R_2(t)\overrightarrow{\mathrm{O}P_4(t)}.$$

a. Montrer que l'arc de courbe Γ_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1(t) & = & f_1(t) & = & 2t+1 \\ y_1(t) & = & g_1(t) & = & t^2+1 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

b. Étudier les variations de f_1 et g_1 sur $[0\,;\,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

c. On admet que l'arc de courbe Γ_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_2(t) & = & f_2(t) & = & 2t+3 \\ y_2(t) & = & g_2(t) & = & -2t^2+2t+2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

Étudier les variations de f_2 et g_2 sur $[0\,;\,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

d. Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$.

e. Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $M_2(1)$.

f. On rappelle que, dans le repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 2 centimètres.
Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe Γ aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$ puis l'arc de courbe Γ_1. Construire, sur la même figure que Γ_1, les tangentes à l'are de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $M_2(1)$ puis l'arc de Γ_2.
Placer les points de définition P_1 , P_2, P_3, P_4 sur la figure.

3. **a.** Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2.

b. Montrer que les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 ont même tangente en I.

c. Montrer que la tangente commune à l'arc Γ_1 et à l'are Γ_2 au point I est la droite (P_2P_3).

d. Montrer que le point $M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$ et que le point $M_2(1)$ est le milieu du segment $[P_3P_4]$.