

Brevet de technicien supérieur

Conception de produits industriels session 2008

A. P. M. E. P.

Exercice 1

6 points

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' - y = (-4x - 6)e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$(E_0) : y'' - y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x^2 + 4x)e^{-x}$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

1.
 - a. Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto e^{-x}$.
 - b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) \sim 3 + x - 3x^2 + x^2 \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

2. On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
 - a. Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
 - b. Étudier les positions relatives de \mathcal{C} et T au voisinage du point d'abscisse 0.

Exercice 2

5 points

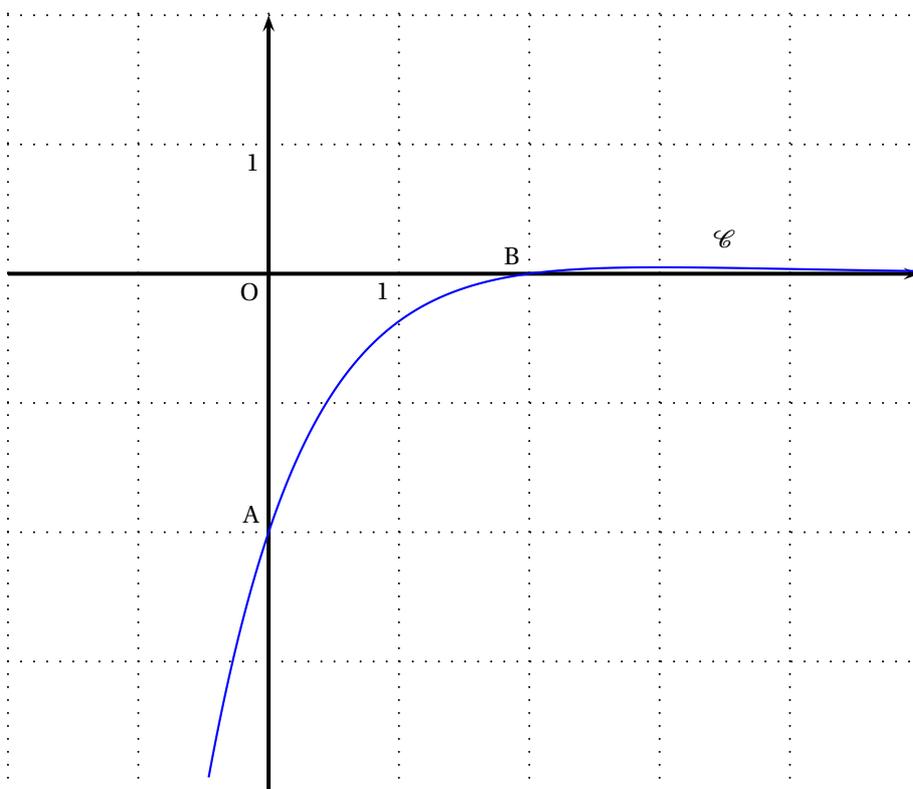
A. Étude des variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

où a et b sont deux nombres réels.

La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 2 cm est donnée ci-dessous.



1. La courbe \mathcal{C} passe par les points A et B de coordonnées respectives $(0; -2)$ et $(2; 0)$.
Déterminer les nombres réels a et b .

Dans la suite de cet exercice, on admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x - 2)e^{-x}$.

2.
 - a. Démontrer que, pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = (3 - x)e^{-x}$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} .
 - c. Établir le tableau de variations de f .
Dans ce tableau, on ne demande pas de faire figurer les limites.

B. Calcul intégral

On note $I = \int_0^2 f(x) dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = -1 - e^{-2}$.
2.
 - a. En déduire la valeur exacte de l'aire S en cm^2 de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées et la courbe \mathcal{C} entre les points A et B d'abscisses respectives 0 et 2.
 - b. Donner la valeur approchée de S arrondie à 10^{-2} .

Exercice 3

9 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité graphique est 2 centimètres.

On appelle courbe de Bézier définie par les points de définition $A_i (0 \leq i \leq n)$ l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \overrightarrow{OA_i} \text{ où } B_{i,n}(t) = C_n^i (1-t)^{n-i}.$$

A. Construction d'une courbe de Bézier \mathcal{C}_1

Dans cette question, on s'intéresse à la courbe de Bézier \mathcal{C}_1 définie par les quatre points de définition $A(0; 1); B(2; 1); C(0; 2); D(0; 4)$, dans cet ordre.

1. Démontrer que, pour tout t de $[0; 1]$, $B_{1,3}(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3$.

2. On admet que, pour tout t de $[0; 1]$

$$B_{0,3}(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3; \quad B_{2,3}(t) = 3t^2 - 3t^3 \text{ et } B_{3,3}(t) = t^3.$$

En déduire qu'un système d'équations paramétriques de la courbe \mathcal{C}_1 est :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y = g_1(t) = 1 + 3t^2 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0; 1].$$

3. Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[0; 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4. Préciser les coordonnées des points de la courbe \mathcal{C}_1 où les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées.

5. Montrer que la droite (AB) est tangente à la courbe \mathcal{C}_1 au point A.

6. Tracer la tangente (AB) et la courbe \mathcal{C}_1 dans le repère donné au début de l'énoncé.

B. Étude géométrique et construction d'une courbe de Bézier \mathcal{C}_2

On considère la courbe de Bézier \mathcal{C}_2 définie par les trois points de définition $E(-2; 0); F(3; 1)$ et $A(0; 1)$ dans cet ordre.

Les deux résultats suivants n'ont pas à être démontrés.

• Un système d'équations paramétriques de la courbe \mathcal{C}_2 est :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -2 - 2t + 4t^2 \\ y = g_2(t) = 2t - t^2 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0; 1].$$

• Le tableau de variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0	$\frac{1}{4}$	1
$f_2'(t)$	-2	-	0
$f_2(t)$	-2		0
$g_2'(t)$	2	+	0
$g_2(t)$	0		1

Note: In the original image, there are arrows indicating the direction of variation. For $f_2(t)$, an arrow points from -2 at $t=0$ down to -2,25 at $t=1/4$, and another arrow points from -2,25 at $t=1/4$ up to 0 at $t=1$. For $g_2(t)$, an arrow points from 0 at $t=0$ up to 1 at $t=1$.

1. Construire sur la figure de la partie A le point M_0 tel que $\overrightarrow{EM_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$, le point M_1 tel que $\overrightarrow{FM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$ et le point R tel que $\overrightarrow{M_0R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_0M_1}$.
2. Calculer les coordonnées des points M_0 , M_1 et R .
3. Montrer que le point R est le point de la courbe \mathcal{C}_2 de paramètre $\frac{1}{2}$.
4. Montrer que la droite (AF) est tangente à la courbe \mathcal{C}_2 au point A.
5. Montrer que les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont la même tangente au point A.
6. Tracer la courbe \mathcal{C}_2 sur la même figure que la courbe \mathcal{C}_1 .