BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2009

***

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. **L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.**

Deux feuilles de papier millimétré sont fournies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification.
Notation :
Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1° Soient M et N les matrices définies par $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La somme $M + N$ est :	$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2° Avec les mêmes données qu'au 1° :

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M \times N$ est :	$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 7 & -3 & 9 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ -7 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

3° $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de sens direct de l'espace. On considère les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :	orthogonaux	colinéaires	ni orthogonaux ni colinéaires

4° Avec les mêmes données qu'au 3°,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :	$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 (8 points)

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + xy = x$.
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels et y' sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions sur **R** de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + xy = 0.$$

2° Démontrer que la fonction constante g, définie sur **R** par $g(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Étude d'une fonction et réalisation d'une figure

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ d'unité graphique 4 centimètres.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2° a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

b) Donner le tableau de variation de f sur **R**.

3° a) Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ ***défini au début de la partie B***.

b) Tracer dans le même repère que la courbe C la courbe P d'équation $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$.

On ne demande pas d'étudier les variations de la fonction définie par $x \mapsto 2 - \dfrac{x^2}{2}$.

On constate que les courbes C et P sont proches l'une de l'autre sur l'intervalle $[-0{,}5\,;0{,}5]$.

C. Détermination d'une valeur approchée d'une intégrale

Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_{-0,5}^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1° a) En utilisant le développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 2 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° a) On note $J = \int_{-0,5}^{0,5} \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$.

Démontrer que $J = \frac{47}{24}$. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-3}.

b) Un logiciel donne $I \approx 1{,}960$. Vérifier que cette valeur approchée de I et la valeur approchée de J obtenue à la question a) diffèrent de 2×10^{-3}.

EXERCICE 3 (8 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres. On se propose de construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3 et P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré.

Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$:

$$P_1(0, 3),\ P_2(1, -2),\ P_3(4, 3) \text{ et } P_4(-2, 5).$$

La courbe B-spline cherchée est la réunion de deux arcs de courbe C_1 et C_2.

A. Détermination d'une représentation paramétrique de l'arc de courbe C_1

1° On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour tout t appartenant à $[0, 1]$ par :

$$R_i(t) = 3 \sum_{j=0}^{j=2-i} (-1)^j \frac{(t + 2 - i - j)^2}{j!\,(3 - j)!}.$$

Démontrer que, pour tout t de $[0, 1]$, $R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$.

2° L'arc de courbe C_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = R_0(t)\ \overrightarrow{OP_1} + R_1(t)\ \overrightarrow{OP_2} + R_2(t)\ \overrightarrow{OP_3}.$$

On admet que pour tout t de $[0, 1]$: $R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2}$ et $R_2(t) = \frac{1}{2}t^2$.

Démontrer que l'arc de courbe C_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = t^2 + t + \dfrac{1}{2} \\ y = g_1(t) = 5t^2 - 5t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ où t appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

B. Étude de variations et construction de la courbe B-spline

1° a) Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[0, 1]$, où f_1 et g_1 sont les fonctions définies à la question 2° de la partie A. Rassembler les résultats dans un tableau unique.

b) Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe C_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$, $M_1(1)$.

2° L'arc de courbe C_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2}(t) = R_0(t)\ \overrightarrow{OP_2} + R_1(t)\ \overrightarrow{OP_3} + R_2(t)\ \overrightarrow{OP_4}.$$

On admet que l'arc de courbe C_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -\dfrac{9}{2}t^2 + 3t + \dfrac{5}{2} \\ y = g_2(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 5t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ où t appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f_2'(t)$	3	+	0	−	−6
$f_2(t)$	$\frac{5}{2}$	↗	3	↘	1
$g_2'(t)$	5		+		2
$g_2(t)$	$\frac{1}{2}$	↗	2	↗	4

Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe C_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$, $M_2(1)$.

3° On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$ où l'unité graphique est 2 centimètres.

a) Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe C_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$ et $M_1(1)$, puis l'arc de courbe C_1.

b) Construire, sur le même graphique, les tangentes à l'arc de courbe C_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$, $M_2(1)$, puis l'arc de courbe C_2.

c) Placer les points de définition sur la figure.

4° a) Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbe C_1 et C_2.

b) Montrer que la tangente commune à l'arc C_1 et à l'arc C_2 au point I est la droite (P_2P_3).