BTS CPI2	**Sujet 2009**	**Courbes B. Spline** **Equations différentielles** **Étude de fonction**	**19/05/2009**	**Durée : 3h**
	Calculatrice autorisée			

Exercice 1 **4 points en QCM (pas de points négatifs)**

La somme de deux matrices s'obtient naturellement en additionnant deux termes correspondants
1°) Réponse B
Le produit a été étudié en classe la dernière semaine : il suffit de l'avoir effectué une ou deux fois.
2°) Réponse A
Deux vecteurs sont colinéaires lorsque les coordonnées de ces vecteurs sont proportionnelles, ce qui n'est pas le cas dans l'exemple donné.
Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = -6+2+4 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
3°) Réponse A
4°) Réponse C

Exercice 2 **8 points**

Partie A Résolution d'une équation différentielle

1. Résoudre l'équation (E_0)

(E_0) est une équation différentielle linéaire du premier ordre et sans second membre.

Avec les notations du formulaire : $a(x)=1$, $b(x)=x$

Une primitive de $\frac{b}{a}$ est donc la fonction G définie par $G(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\boxed{\text{La solution générale de } (E_0) \text{ est donc : } y(x)=ke^{-\frac{x2}{2}}}$

2. Vérifier que g est une solution particulière de (E)

$g'(x)+xg(x)=0+x.1=x$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc bien une solution particulière de } (E)}$

3. $\boxed{\text{La solution générale de } (E) \text{ est donc : } y(x)=ke^{-\frac{x2}{2}}+1 \text{ où k est une constante réelle.}}$

(C'est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E), en l'occurrence la fonction g de la question précédente.)

4. f est une solution de (E) , donc $f(x)= ke^{-\frac{x2}{2}}+1$

Comme $f(0)=2$, on en déduit : $ke^0+1=2 \Leftrightarrow k+1=2 \Leftrightarrow k=1$

$\boxed{\textbf{Conclusion : } f(x)=e^{-\frac{x2}{2}}+1}$

Partie B

1. a) Les deux limites demandées sont égales à 1. Le plus important est de mentionner le changement de variable $t = -\frac{x^2}{2}$ et de composer les limites. On termine bien sûr par la limite d'une somme.

b) Chacune des deux limites correspond à une asymptote horizontale (en fait deux fois la même droite). Une rédaction possible :

La droite d'équation y=1 est asymptote à la courbe au voisinage de +∞ et de -∞.

2. a) $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = u(x) + e^{v(x)}$. Sa dérivée est $f'(x) = u'(x) + v'(x)e^{v(x)}$.

Ici $u(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{x^2}{2}$. On en déduit immédiatement la réponse.

$\boxed{f'(x) = -x\, e^{-\frac{x^2}{2}}}$

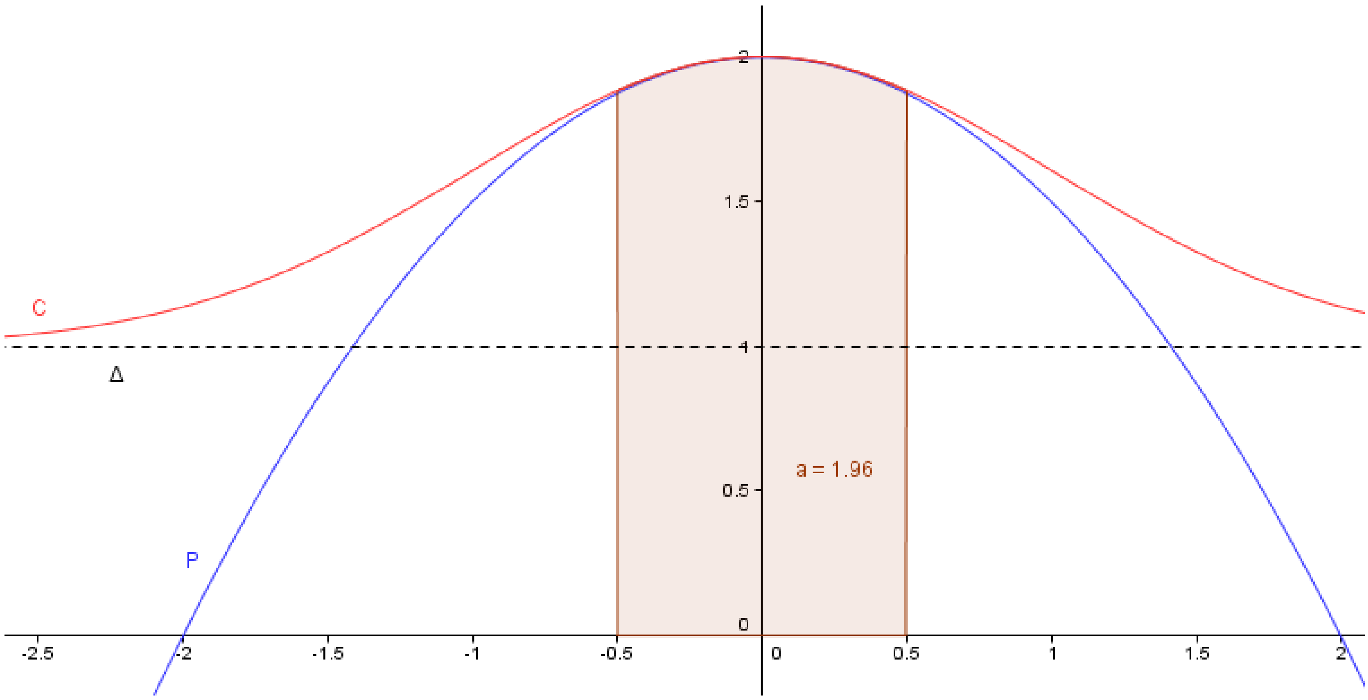
b) L'exponentielle étant une fonction strictement positive, on en déduit que le signe de $f'(x)$ dépend exclusivement du signe de $-x$. La justification du signe de $-x$ n'a pas besoin d'être rédigée vu sa simplicité (on peut si l'on veut évoquer un polynôme du premier degré dont la racine est 0). On en déduit le tableau de signe de f' et de variations de f.

Il ne faut pas oublier de reporter les limites, ni de calculer le maximum de la fonction.

Il est à noter $f(0) = 2$ d'après la Partie A.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'		-		+	
f	1	↗	2	↘	1

3.



Partie C

1. Le plus important est de signaler le changement de variable $t = -\dfrac{x^2}{2}$ et de préciser que sa limite quand x tend vers 0 est égale à 0.
   La réponse b) s'obtient en ajoutant la constante 1 au développement limité trouvé à la question a).
1. J est une intégrale qui correspond à "l'aire sous la parabole bleue" puisque la fonction $2 - \dfrac{x^2}{2}$ est positive sur l'intervalle [-0,5 ;0,5]
   Ce n'était pas dans l'énoncé, mais il n'est pas interdit de le signaler. Cependant, il n'était demandé à aucun moment d'exprimer cette aire en cm². Ceux qui ont fait ce calcul n'ont pas lu la question.
   Le calcul est immédiat grâce à l'obtention d'une primitive.
   La valeur arrondie au millième de J est 1,958.
   Le logiciel a donné : I $\approx$ 1,960. I est "l'aire sous la courbe rouge" puisque la fonction f est positive.
   L'écart entre la valeur approchée de I et celle de J est donc $1{,}960 - 1{,}958 = 0{,}002 = 2 \times 10^{-3}$.

Exercice 3 **8 points**

Partie A Détermination d'une écriture paramétrique de l'arc de courbe C_1

1. $\boxed{R_{0,2}(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - t + \dfrac{1}{2}}$ (vu et revu en classe)

2. $R_{1,2}(t) = -t^2 + t + \dfrac{1}{2}$, $R_{2,2}(t) = \dfrac{1}{2}t^2$

$P_1\,(0{,}3)$ $P_2\,(1,-2)$ $P_3\,(4{,}3)$ $P_4\,(-2{,}5)$

C_1 est défini par la représentation paramétrique:

$$\boxed{\begin{cases} x = f_1(t) = t^2 + t + \dfrac{1}{2} \\ y = g_1(t) = 5t^2 - 5t + \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in [0\,;1]}$$ (vu et revu en classe)

Partie B Étude de variations et construction de la courbe B-spline

1. a) $\begin{cases} f'_1(t) = 2t + 1 \\ g'_1(t) = 10t - 5 \end{cases}$ Ces deux polynômes sont du premier degré. Leur racine est respectivement $\dfrac{-1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
signe de $f_1'(t)$	1	+	2	+	3
f_1	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$
signe de $g_1'(t)$	-5	–	0	+	5
g_1	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

1. b)

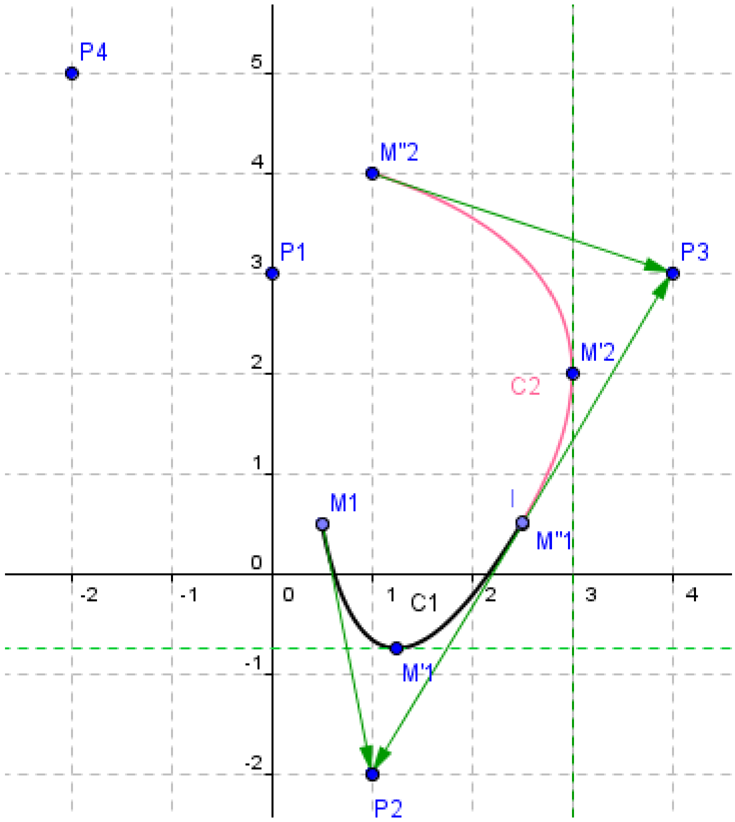
On rappelle la règle de cours.
Un vecteur directeur de chaque tangente peut donc être :
$\vec{v}\,(1,-5)$ $\vec{w}\,(2{,}0)$ et $\vec{n}\,(3{,}5)$

2. Les vecteurs directeurs s'obtiennent immédiatement par consultation du tableau donné dans le texte. Il suffit de rappeler d'abord la règle du cours.

$\boxed{\vec{u}_0\ (3,5)\quad \vec{u}\,\frac{1}{3}=\vec{j}}$ (cela évite de calculer $g'_2\left(\frac{1}{3}\right)$ qui est non nul d'après le tableau)

$\boxed{\vec{u}_1\ \ (-6,2)}$ ou $(-3,1)$ ou $(3,-1)$.

3.



4. a) Le point de raccord des courbes C_1 et C_2 est $M_1(1) = M_2(0) = \mathrm{I}$ $\boxed{\mathrm{I}\left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)}$

Il suffit de signaler que c'est une caractéristique des courbes B-spline, sinon, il suffit d'observer les deux tableaux, ce qui permet de conclure que ce point est commun aux deux arcs de courbe.

b) On peut rappeler que les courbes B-spline ont la particularité d'avoir des tangentes communes en chacun des points de raccordement et que ces tangentes s'obtiennent à l'aide de deux points de contrôle consécutifs. Dans le cas particulier des courbes B-spline définies avec des polynômes de Riesenfeld de degré 2, le *milieu* de deux points de contrôle consécutifs est d'ailleurs le point de raccord de deux arcs de courbe. La réponse est alors évidente.

L'énoncé suggère toutefois de le vérifier par calcul.

D'après les questions précédentes, la tangente à l'arc C_1 au point I a pour vecteur directeur $\vec{n}$ et la tangente à l'arc C_2 en ce même point a pour vecteur directeur $\vec{u}_0$. Comme $\vec{u}_0$ et $\vec{n}$ sont colinéaires (ici, ils sont d'ailleurs égaux), on en déduit que ces deux tangentes sont confondues. Il reste alors à vérifier que $\overrightarrow{P2P3}$ est colinéaire à $\vec{u}_0$ (ou $\vec{n}$).

Il existe plusieurs variantes pour la démonstration :

a) Montrer que I est le milieu de $[P_2P_3]$ à l'aide des coordonnées et vérifier que $\overrightarrow{P2P3}$ est colinéaire à $\vec{u}_0$

b) Calculer le coefficient directeur de la droite (P_2P_3) et le comparer à celui de la tangente commune

qui est $\frac{5}{3}$ En effet $\vec{n}\,(3,5)$